Chroniques
fondements et epistemologie de l'activite mathematique
foundations and epistemology of mathematical activity

Erreurs et difficultés dans l'apprentissage en mathématiques : réflexion sur des histoires analogues

Charlotte Mégrourèche
Université du Québec à Montréal
Megroureche.charlotte@courrier.uqam.ca

Résumé

Pour aborder les articles de Bergeron & Barallobres (2019) et Houle & Giroux (2016), une réflexion est menée sur les manières de concevoir les erreurs en mathématiques chez les élèves. Les entrées scientifiques des travaux menés sur les difficultés d'apprentissage en mathématiques rappellent en effet les différentes postures adoptées en didactique des mathématiques pour interpréter le rôle et la place des erreurs dans ses relations avec l'apprentissage. Ce texte adjacent soulève, à partir de l'établissement d'un parallèle, des questions sur les différentes façons de comprendre et donner du sens aux difficultés d'apprentissage en mathématiques.

Introduction

Dans leur article, Houle & Giroux (2016) expliquent que plusieurs domaines d'études s'intéressent aux difficultés d'apprentissage en mathématiques. Ces domaines d'étude sont marqués par leurs intérêts scientifiques spécifiques, qui influencent en retour leurs entrées respectives sur la question des difficultés d'apprentissage. La neuropsychologie, par exemple, s'intéresse aux aspects biologiques des processus cognitifs. Elle aborde la question des difficultés chez les élèves à travers la recherche et la formulation de causes physiques (biologiques). Les difficultés d'apprentissage sont ainsi expliquées comme provenant de déficiences physiques, qu'il faut diagnostiquer pour pallier aux incapacités qui en découlent. La recherche en psychologie cognitive aborde quant à elle la question des difficultés d'apprentissage sous l'angle des « processus cognitifs » sollicités dans l'apprentissage. La présence de fonctions cognitives encore incomplètes ou insatisfaisantes expliquerait les difficultés liées au processus d'apprentissage. Des interventions doivent ainsi être développées pour compléter et bonifier ces processus. Finalement, les travaux en didactique des mathématiques, tel que l'expliquent aussi Bergeron & Barallobres (2019), approchent la question des difficultés d'apprentissage en mathématiques par les mathématiques elles-mêmes. Pour se faire, ils cherchent à comprendre la nature des obstacles provenant non plus de fonctions biologiques ou cognitives déficitaires, mais plutôt, par exemple, de la complexité des contenus mathématiques. En bref, les travaux en didactique des mathématiques investiguent les difficultés mathématiques des élèves par la « difficulté » des mathématiques elles-mêmes, ouvrant ainsi des portes pour intervenir dans/sur leur apprentissage *par l'intermédiaire des mathématiques* en jeu.

Ces différentes manières d'envisager les difficultés d'apprentissage font écho aux courants qui ont encadré l'erreur dans sa relation avec le processus de développement de connaissances mathématiques par les élèves. Dans ce texte adjacent, je souligne un parallèle qui peut être tracé

Chroniques
fondements et epistemologie de l'activite mathematique
foundations and epistemology of mathematical activity

entre ces deux discours et des questions qui en découlent.

La vision médicale : l'erreur comme déficit

Une première vision envisage l'erreur comme une pathologie, comme le symptôme d'un état faisant obstacle au développement des connaissances. L'erreur est conçue comme la marque de structures insuffisantes et inadéquates, provoquant en retour des incompréhensions chez l'élève. Cette vision, dite médicale (Bélanger, 1990-91), invite à voir l'erreur comme découlant de connaissances et de compréhensions déficitaires chez l'élève. Tel qu'exprimé par Bélanger, l'influence de ce modèle se décline à travers trois caractéristiques fondamentales : (1) l'existence d'une norme qui est fixée et qui agit comme référence, (2) la tolérance d'un certain degré de déviation par rapport à cette norme et (3) le besoin de développer des méthodes pour catégoriser, identifier et normaliser ce qui dévie de cette norme.

C'est donc à travers ces normes que les erreurs sont comprises comme erreurs. Un exemple peut ici aider à bien saisir cette vision. Soit l'erreur d'addition de fractions suivante : $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{5}$. Cette erreur est ici comprise comme un écart à une pratique dite « normale » d'addition de fractions (à partir de la recherche de dénominateurs communs par exemple). À travers la vision médicale, la production erronée devient le signe d'une incompréhension, d'un déficit de connaissance qui se traduit en une incapacité à additionner des fractions. L'erreur n'est alors pas simplement une ratée momentanée qui pourrait se corriger d'elle-même : elle est vue comme le symptôme d'une incompréhension plus profonde auquel il devient primordial de s'attaquer.

C'est par la nécessité de correspondre à ces normes que des interventions ciblées, qui seront orientées par un diagnostic, seront centrales dans ce courant (e.g. Ashlock, 1976). Pour éviter que ces lacunes affectent les compréhensions subséquentes des élèves ou même les empêchent d'en développer de nouvelles (Kundu et Segupta, 2013), le diagnostic d'erreurs prend une place prédominante. L'erreur doit être diagnostiquée pour que des interventions soient entreprises afin de remédier à ces lacunes et incompréhensions. Une réparation de ces erreurs est fondamentale, sans quoi le processus d'apprentissage se traduira en d'autres difficultés, voire en des incapacités subséquentes à fonctionner ou même à apprendre.

La vision humaniste : l'erreur comme signe d'apprentissage

Une deuxième vision considère l'erreur non plus comme un état à corriger, mais plutôt comme une conséquence naturelle, voire même essentielle, du processus d'apprentissage. « On apprend de nos erreurs », dit la maxime. L'erreur n'est alors plus interprétée comme un manque, mais plutôt comme la marque d'un apprentissage en cours de réalisation. L'erreur est comprise comme indicateur et moteur de progrès (Astolfi, 1997). Puisqu'elle témoigne d'une connaissance en devenir, l'erreur est conçue comme partie intégrante du processus d'apprentissage.

Prise ici comme connaissance en construction, l'erreur marque les limites d'une connaissance qui s'est déjà montrée valide (IREM d'Aquitaine, 2013). Bref, l'erreur est la marque d'un rationnel ayant déjà fait ses preuves dans d'autres contextes. C'est l'utilisation de cette connaissance en dehors de son domaine de validité qui provoque ladite erreur. La stratégie d'addition erronée $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{5}$ est alors vue selon cette vision comme la manifestation d'une stratégie valable dans le domaine des nombres naturels, par exemple. Par contre, cette compréhension n'est plus valable avec les fractions. Cette limitation au niveau des connaissances sur ces nouvelles additions motive leur réforme et ouvre la porte à la progression souhaitée : pour additionner, il faut maintenant tenir compte des différents

Chroniques
fondements et epistemologie de l'activite mathematique
foundations and epistemology of mathematical activity

fractionnements en jeu et, par exemple, opérer à partir de dénominateurs communs.

Parce qu'elle est la marque de structures qui ont déjà été suffisantes, l'erreur est la trace légitime d'une réforme en cours, d'un progrès en cours de réalisation. L'erreur n'est ainsi plus le constat d'un état final d'incompréhension, mais plutôt la trace du processus de surpassement d'obstacles et d'élargissement de compréhensions en cours (Astolfi, 1997). Alignées avec les obstacles épistémologiques de Bachelard qui non seulement motivent, mais forcent la progression des connaissances, les erreurs sont vues comme étant centrales, voire même fondamentales à l'apprentissage. L'esprit se forme à coup de réformes (Astolfi, 1997). L'erreur porte en elle le bagage d'un processus d'apprentissage qu'elle motive et oriente. Elle est ainsi conçue comme un moment charnière du processus de développement de connaissances, qui après améliorations et bonifications deviendront plus adaptées.

La vision mathématique : l'erreur comme occasion productive

Proulx et Maheux (2012) présentent une troisième vision de l'erreur a tranquillement vu le jour en didactique des mathématiques. Cette autre vision invite, par un regard sur les processus de développement de la discipline en elle-même, à envisager l'erreur comme une occasion de produire des mathématiques (Borasi, 1996). En effet, cette vision « productive » de l'erreur soutient que celles-ci permettent et même provoquent le développement d'idées et de compréhensions nouvelles. Les erreurs sont alors envisagées comme des occasions à saisir, à titre d'opportunités pour stimuler et produire des mathématiques novatrices.

Cette vision se fonde sur une analyse des erreurs ayant historiquement marqué la discipline, soulignant comment celles-ci ont été porteuses pour le développement des mathématiques elles-mêmes. Elle montre que les erreurs ont fréquemment généré, voire imposé, l'avancement et la création de théories novatrices, de concepts, de procédures et de raisonnements nouveaux (Borasi, 1996 ; Lakatos, 1976). Certains auteurs vont même jusqu'à affirmer que sans elles, sans ce qui peut être maintenant regardé comme des erreurs, les mathématiques ne seraient pas ce qu'elles sont aujourd'hui (Davis & Hersh, 1981 ; Kline, 1980). Les contradictions et incohérences dans les méthodes développées par Fermat (qui feraient aujourd'hui perdre plusieurs des points à un élève lors d'un examen) ont par exemple façonné et transformé le développement de l'analyse telle que pratiquée aujourd'hui. Ou encore, les imprécisions au niveau de l'écriture dans le développement du calcul différentiel et intégral, qui peuvent aujourd'hui être vues comme des grands manques de rigueur et de précision, ont forcé la création de symbolismes puissants et novateurs. Cette manière d'envisager l'erreur, d'analyser son développement, permet de la voir comme étant une occasion de connaitre mieux, de connaître plus et même de connaître différemment.

L'exemple d'addition erronée de fractions ($\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{5}$) représente en ce sens une opportunité à saisir pour produire et stimuler d'autres mathématiques. En l'envisageant comme une proposition mathématique légitime à questionner et à creuser, il devient possible d'y extraire un potentiel mathématique. Il est possible de se demander quels seraient des cas où cette technique d'addition produit des résultats valables (Borasi, Fiutko et Reopolis, 1985). Le domaine des ratios, par exemple, offrirait une possibilité à l'égalité $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{5}$. Un questionnement sur le tout relatif à chaque fraction permet de remettre en question la non-validité de la stratégie : Quels touts valident cette égalité ? Par exemple, s'il s'agit de la demie de 2, du tiers de 3 et du 2 cinquièmes de 5, l'égalité est vérifiée où il est vrai que $\frac{1}{2}(2)+\frac{1}{3}(3)=\frac{2}{5}(5)$. Pour quels autres touts cette relation est-elle validée? Quelle généralisation à propos de ces touts est-il possible de produire pour rendre l'égalité valide?

Les erreurs deviennent ainsi des occasions à saisir pour produire et développer des mathématiques, des occasions à saisir pour façonner et transformer les connaissances et compréhensions mathématiques. En d'autres mots, les erreurs sont alors vues comme des occasions supplémentaires de chercher et de se questionner.

Que tirer de ce parallèle?

Un regard sur les orientations scientifiques qui sous-tendent les différentes postures adoptées vis-à-vis l'erreur et les difficultés en mathématiques offre la possibilité de dégager des similitudes importantes entre elles dans leurs relations à l'apprentissage. De la vision considérant l'erreur comme une pathologie faisant obstacle à l'apprentissage, à une vision envisageant l'erreur comme une partie intégrale du processus de construction des connaissances, il est possible de reconnaître, pour les difficultés d'apprentissage, le chemin tracé par la neuropsychologie vers la psychologie cognitive. Les erreurs, tout comme les difficultés d'apprentissage, sont passées de symptômes (presque physiques) à diagnostiquer (afin de comprendre les incapacités qui en découlent) à des manifestations de compréhensions incomplètes et insatisfaisantes qui doivent être bonifiées.

Dans leur article, Bergeron et Barallobres (2019) invitent à voir qu'une entrée la didactique des mathématiques sur les difficultés d'apprentissage des élèves a la particularité d'aborder la question par les mathématiques elles-mêmes. C'est cette entrée par la spécificité de la discipline qui conduit certains didacticiens des mathématiques à développer et mettre de l'avant une vision de l'erreur soutenant qu'elles peuvent être productrices de mathématiques.

Ce parallèle tracé de manière synthétique entre les visions de l'erreur et les entrées sur les difficultés d'apprentissage en mathématiques soulève aussi d'importantes questions : Les difficultés pourraient-elles, elles aussi, être conçues comme productives *pour les mathématiques ?* De quelles façons les difficultés pourraient-elles générer de *nouvelles compréhensions et idées* (e.g., dans la classe de mathématique) ? Comment les difficultés peuvent-elles être saisies comme des occasions de produire de *nouvelles mathématiques* ? À la manière de Borasi, qui propose d'utiliser les erreurs comme « tremplins » pour approfondir des idées et explorer de nouvelles possibilités, les difficultés pourraient-elles être saisies comme opportunités pour développer et creuser des mathématiques avec les élèves?

Dans le monde anglophone, en *mathematics education*, le concept de *productive struggle* est de plus en plus étudié (voir e.g., le numéro thématique dans *Mathematics Teaching in the Middle School*, NCTM, 2018). L'idée selon laquelle la rencontre de difficultés peut être productif (et même nécessaire) pour le développement de compréhensions mathématiques est centrale à cette perspective. Serait-ce possible d'associer les difficultés d'apprentissage en mathématiques avec ces *productive struggles*? En d'autres mots, pourrait-il être possible de s'appuyer sur ces difficultés comme moteur pour le développement des mathématiques de la classe, c'est-à-dire de s'en servir pour introduire et développer de nouveaux concepts et de nouvelles méthodes ?

Ces questions sont différentes de celles que soulèvent Houle & Giroux (2016) et Bergeron & Barallobres (2019), mais elles mènent aussi à repenser le rôle et la place des difficultés d'apprentissage dans le développement, l'exploration et l'approfondissement des connaissances mathématiques. Bien qu'il n'y ait pas de réponses faciles à ces questions, l'adoption d'une vision productive apporterait une dimension positive aux difficultés d'apprentissage en mathématiques. Celles-ci, comme l'erreur, pourraient alors devenir potentialités d'innovation et de créativité. Les implications d'une vision productive sur les difficultés d'apprentissage sont importantes, mais loin d'être évidentes…

References

Ashlock, R. B. (1972). *Error patterns in computation: Using errors patterns to help each student learn*. Pearson : Upper Saddle River, New Jersey.

Astolfi, J. P. (1997). *L'erreur, un outil pour enseigner*. ESF éditeur : Paris, France.

Bélanger, M. (1990-1991). Les erreurs en arithmétique : un siècle de présomption américaine. *Petit x*, 26, 49-71.

Bergeron, L., & Barallobres, G. (2019). Les modèles d'enseignement des mathématiques pour les élèves en difficulté. Chroniques — Fondements et épistémologie de l'activité mathématique

Borasi, R. (1996). *Reconceiving mathematic instruction: A focus on errors*. Ablex Publishing corporation: Norwood, New Jersey.

Borasi, R. Fiutko, S.M.A. et Reopolis, B. (1985). Alternative rules to operate with fractions. *Focus on learning problems in mathematics*, 7(3-4). Center for teaching/learning of mathematics.

Davis. P. J., & Hersh, R. (1981). *The mathematical experience*. Mariner Books. Wilmington, North Carolina.

Houle, V., & Giroux, J. (2016). Difficultés en mathématiques : contribution de différentes disciplines et plaidoyer en faveur d'une approche didactique. *Chroniques — Fondements et épistémologie de l'activité mathématique*.

IREM d'Aquitaine. (2013). L'erreur dans l'apprentissage des mathématiques. *Petit x.* 93, 7-28.

Lakatos, I. M. (1976). Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery. Cambridge University Press: Cambridge, UK.

NCTM (2018), Focus issue: Productive struggle. *Mathematics teaching in the middle school*. 23(4).

Proulx, J., & Maheux, J.-F. (2012). Épistémologie et didactique des mathématiques : questions anciennes, nouvelles questions. *For the Learning of Mathematics*, 32(2), 41-46.