Chroniques
fondements et epistemologie de l'activite mathematique
foundations and epistemology of mathematical activity

Recherches et résolution de problèmes en enseignement des mathématiques : éducation, *mathematics education* et didactique des mathématiques

Jérôme Proulx
Laboratoire Épistémologie et Activité Mathématique
Université du Québec à Montréal
proulx.jerome@uqam.ca

Résumé

Dans le cadre du 44e congrès de l'Institut des troubles d'apprentissage (ITA), tenu à Montréal le 29 mars 2019, j'ai été invité à intervenir lors du symposium « Apprendre les mathématiques par la résolution de problèmes : fondements théoriques et actualisation en salle de classe ». Je partage ici le texte de cette conférence.

> The mathematician's main reason for existence is to solve problems, and that, therefore, what mathematics really consists of is problems and solutions. (Halmos, 1980, p. 519; mathématicien)

> Solving problems is the heart of mathematics (Hiebert, 2004, p. 55; *mathematics educator*)

> Il nous semble tout à fait important que les élèves continuent de résoudre des problèmes, ce qui est une activité mathématique essentielle. (Balmes & Coppé, 1998, p. 40; didacticiennes)

Introduction

J'ai été invité comme didacticien des mathématiques à parler de résolution de problèmes en enseignement des mathématiques. Une raison semblait être la variété des discours sur la résolution de problèmes et ma capacité de les croiser. L'intention était surtout que je « rentre » comme chercheur à travers les recherches réalisées, pour en parler et expliquer ce qui en ressort. Mon objectif est, pour cette présentation, d'offrir une certaine synthèse des travaux sur la résolution de problèmes en enseignement des mathématiques. C'est une lourde tâche, mais c'est celle à laquelle je vais tenter de contribuer.

Pour atteindre cet objectif ambitieux, j'ai décidé de vous parler de la résolution de problèmes en enseignement des mathématiques sous trois angles. Le premier angle concerne les méta-analyses effectuées en éducation, abordées à travers les travaux menés depuis maintenant plus de 10 ans par l'équipe de John Hattie, et dont certains touchent aux dimensions de résolution de problèmes en enseignement des mathématiques. Le deuxième angle concerne les écrits actuels et passés en *mathematics education* sur l'utilisation de la résolution de problèmes en classe de mathématiques et toutes les *research evidence*, comme les anglophones les appellent, a en retirer. Le troisième angle concerne une entrée en didactique des mathématiques sur la résolution de problèmes, élaborée au sein de mon laboratoire de recherche et expérimentée en salle de classe du primaire jusqu'à l'université, soit avec des enfants de 6 à 66 ans !

Chroniques
fondements et epistemologie de l'activite mathematique
foundations and epistemology of mathematical activity

Chacun de ces angles – éducation, *mathematics education* et didactique des mathématiques – est abordé en mettant en valeur leurs propres caractéristiques et différences en lien avec les retombées de la résolution de problèmes en enseignement des mathématiques.

Travaux en éducation : résolution de problèmes et méta-analyses

Les travaux de John Hattie, centrés sur la synthèse de méta-analyses des effets de diverses approches pour améliorer la réussite des élèves à l'école, sont de plus en plus présents et cités dans le monde de l'éducation. Par leur ampleur et leur exhaustivité – certains affirment qu'ils représentent la plus grande base de données jamais produite par la recherche en éducation, comptant plus de 1200 méta-analyses, 70000 études et 300 millions d'élèves (Hattie et al., 2016, p. 5) – ils constituent une porte d'entrée sur toute une gamme de dimensions en matière d'enseignement et d'apprentissage dans les écoles. Mon analyse vise ici à mieux comprendre le sens pouvant être donné aux travaux menés par Hattie et son équipe, précisément pour l'enseignement des mathématiques en contexte de résolution de problèmes; et non pas de faire une revue complète de ses travaux[1]. Cette analyse porte principalement sur le livre *Visible Learning* (Hattie, 2009), tout en faisant référence à d'autres ouvrages écrits par la suite : *Visible Learning for Teachers* (Hattie, 2012) et *Visible Learning for Mathematics* (Hattie et al., 2016).

Quelle est la nature des synthèses des méta-analyses réalisées ? Un exemple peut aider à mieux comprendre, soit celui des devoirs (Hattie, 2009, pp. 234-236). Plusieurs chercheurs ont mené des recherches sur l'effet possible des devoirs sur la réussite scolaire des élèves. D'autres chercheurs ont, par une technique qui s'appelle la méta-analyse et qui nécessite des analyses statistiques poussées, fait la synthèse de ces études pour y faire ressortir les effets positifs ou négatifs de toutes les recherches menées sur cette pratique du milieu scolaire. L'équipe de Hattie, quant à elle, fait quelque chose de différent. Ils ont fait une synthèse des méta-analyses réalisées par les autres chercheurs, ce qui s'appelle parfois une méga-analyse. Par cette synthèse des méta-analyses sur les devoirs, ils font ressortir un effet global relatif à cette pratique, soit une synthèse des effets positifs ou négatifs, une sorte d'influence moyenne de tous les travaux réalisés. Ainsi, cette méga-analyse n'est pas une étude sur les devoirs, ni une recension des travaux faits sur les devoirs, ni une méta-analyse de ceux-ci, mais une synthèse des méta-analyses sur la thématique des devoirs. La même chose a été réalisée par Hattie et son équipe sur des thèmes aussi variés que différents comme l'enseignement par résolution de problèmes, l'investissement de nouvelles ressources dans les écoles, le nombre d'élèves par classe, l'évaluation formative, la formation des enseignants, les rétroactions en classe, etc. C'est ce qui fait que les travaux de Hattie et de son équipe sont imposants, voire colossaux, car ils regroupent un grand nombre d'études dans une même synthèse.

Toutefois, qu'est-ce qui motive de telles méga-analyses ? Une des intentions, ambitieuse, est de construire une base scientifique solide pour éclairer la pratique enseignante au niveau des approches qui ont des effets positifs sur la réussite des élèves. Pour y arriver, l'évaluation de cette réussite des élèves repose sur des pré- et post-tests de diverses natures (épreuves écrites, entretiens, etc.). Ainsi, les études recensées par l'équipe de Hattie sont de nature quantitative et font appel à des groupes témoins et échantillons aléatoires (essais comparatifs randomisés).

Pour arriver à ses fins et arriver à faire le tri dans tous ces résultats des méta-analyses, Hattie a établi un ordre de grandeur au moyen de l'*effect size*, qui peut se traduire par « l'ampleur de l'effet » d'un traitement et qui est symbolisé par *d*. Ce *d* est

[1] Pour un traitement et des explications plus en profondeur des travaux de J. Hattie et son équipe, voir l'analyse réalisée dans Proulx (2017).

Chroniques
fondements et epistemologie de l'activite mathematique
foundations and epistemology of mathematical activity

obtenu en divisant la différence des résultats obtenus après et avant traitement par l'écart type des résultats de l'échantillon : $d=[\mu_{\text{après}} - \mu_{\text{avant}}]/\sigma$. Ainsi, *d*=1 signifie une augmentation d'un écart type sur le résultat, soit dans ce cas-ci l'amélioration de la réussite des élèves. Plus *d* est élevé, plus l'ampleur de l'effet est grande. Hattie explique qu'un *d*=1 pour un traitement signifie un gain de deux à trois années scolaires. De plus, comme il l'explique, presque toutes les méta-analyses aboutissent sur un *d* plus grand que 0, ce qui signifie que les élèves ont progressé. Hattie explique qu'un *d*=0,4 signifie un gain d'une année scolaire, ce qui est équivalent à une progression normale chez l'enfant. Ainsi, un *d* plus petit que 0,4 n'est pas souhaitable, car il signifie que le traitement a eu un impact moins important que le cheminement normal de l'élève.

À ceci s'ajoute la marge d'erreur des mesures statistiques effectuées. Il considère une marge d'erreur sur le *d* de 0 à 0,04 comme étant faible, de 0,041 à 0,079 comme étant moyenne et de 0,08 et plus comme étant forte. Prenons à nouveau l'exemple des devoirs, pour lesquels une synthèse de cinq méta-analyses a été réalisée et a donné *d*=0,29 avec une marge d'erreur de 0,027. Cela signifie que l'utilisation des devoirs offre un gain presque aussi important qu'une année complète pour l'élève, avec une marge d'erreur très faible sur ce résultat. Hattie conclut que, bien qu'ils soient avantageux, les devoirs donnent un résultat inférieur au seuil recherché de *d*=0,4 pour être considérés comme significatifs et être dans la zone des effets désirés. C'est donc à partir de ce baromètre des influences que les méga-analyses sont considérées au regard des différents facteurs allant de l'élève, la maison, l'école, etc., et en ce qui concerne les approches d'enseignement.

Ce qui suit propose une analyse des résultats obtenus pour trois approches d'enseignement pertinentes pour la résolution de problèmes en enseignement des mathématiques, soit (1) l'approche d'investigation, (2) l'enseignement par résolution de problèmes et (3) l'approche par problèmes. Cette analyse porte sur les résultats présentés par Hattie et son équipe dans *Visible Learning*, publié en 2009, mais les ampleurs de l'effet ont été rajustées en fonction des nouveaux résultats publiés en 2018 et sont présentées entre parenthèses[2]. Il est aussi important de noter que Hattie et son équipe offrent des résultats pour toutes les matières confondues, sans distinguer les mathématiques, la géographie, le français, etc. Toutefois, lorsque possible, l'analyse suivante fait ressortir des résultats pertinents relativement à l'enseignement des mathématiques en particulier.

Approche d'investigation

L'ampleur de l'effet pour l'approche d'investigation, toutes matières confondues, est considérée faible avec *d*=0,31 (rajustée à d=0,40 en 2018). Voici la définition qu'ils en donnent :

> Inquiry-based teaching is the art of developing challenging situations in which students are asked to observe and question phenomena; pose explanations of what they observe; devise and conduct experiments in which data are collected to support or contradict their theories; analyze data; draw conclusions from experimental data; design and build models; or any combination of these. Such learning situations are meant to be open-ended in that they do not aim to achieve a single "right" answer for a particular question being addressed, but rather involve students more in the process of observing, posing questions, engaging in experimentation or exploration, and learning to analyze and reason. (pp. 208-209)

Ce modèle se rapproche beaucoup de la résolution de problème dans son ensemble, voire de la résolution de situations engageant l'élève dans une intense activité mathématique et un important travail de fouille et de recherche.

[2] Pour avoir une idée de ces ajustements, voir https://www.visiblelearningplus.com/content/research-john-hattie et https://visible-learning.org/hattie-ranking-influences-effect-sizes-learning-achievement/

Chroniques
fondements et epistemologie de l'activite mathematique
foundations and epistemology of mathematical activity

Cette approche dans les recensions de Hattie et son équipe concerne surtout l'enseignement des sciences, mais peut tout de même informer l'enseignement des mathématiques. L'ampleur de l'effet sur le contenu à apprendre est faible, avec *d*=0,16. Par contre, pour tout ce qui touche les aspects relatifs aux processus (e.g. habiletés de résolution de problèmes, processus de questionnement, activité de l'élève) l'ampleur de l'effet est forte avec *d*=0,52, soit au-delà du seuil *d*=0,4. Cette approche d'enseignement, et d'autres études citées le soulignent, fait développer davantage les processus que les contenus (une de ces études donne *d*=0,40 pour le processus et *d*=0,26 pour le contenu). Le résultat d'une autre étude, dans laquelle les enseignants avaient reçu une formation spécifique sur cette approche d'enseignement, est *d*=1,02 pour le développement de la pensée critique, ce qui est un résultat équivalent à un gain de 2 à 3 années d'études.

L'enseignement par résolution de problèmes

Hattie définit l'approche d'enseignement par résolution de problèmes comme suit :

> Problem solving involves the act of defining or determining the cause of the problem; identifying, prioritizing and selecting alternatives for a solution; or using multiple perspectives to uncover the issues related to a particular problem, designing an intervention plan, and then evaluating the outcome. (p. 210)

Six méta-analyses ont été recensées, avec une ampleur de l'effet de *d*=0,61 et une marge d'erreur moyenne de 0,076 (l'ampleur de l'effet a été rajustée à *d*=0,68 en 2018). Avec ces résultats, l'approche par résolution de problèmes représente une des approches d'enseignement qui se démarque le plus, toutes disciplines confondues, parmi les études examinées par Hattie[3].

Hattie souligne que les résultats obtenus pour cette approche d'enseignement, en particulier en mathématiques, relèvent un impact important sur les connaissances de base en mathématiques. En outre, l'ampleur de l'effet sur le développement d'heuristiques de résolution de problèmes, une dimension fondamentale en résolution de problèmes en mathématiques (Brown & Walter, 2005 ; Hersh, 2014 ; Polya, 1957), donne *d*=0,71, qui est très élevé. L'effet d'une approche par heuristiques a aussi été trouvé doublement plus fort en mathématiques qu'en sciences, révélant en quoi cette approche peut être considérée pertinente pour l'enseignement des mathématiques.

L'approche par problèmes

Hattie décrit l'approche par problèmes de la façon suivante :

> 1. Learning is student-centered.
> 2. Learning occurs in small groups.
> 3. A tutor is present as facilitator or guide.
> 4. Authentic problems are presented at the beginning of the learning sequence.
> 5. The problems encountered are used as tools to achieve the required knowledge and the problem solving skills necessary to eventually solve the problem.
> 6. New information is acquired through self-directed learning. (pp. 210-211)

Le résultat *d*=0,15 pour cette approche est faible, avec une forte marge d'erreur de 0,085 pour 8 méta-analyses (l'ampleur de l'effet a été rajustée à *d*=0,26 en 2018). Hattie en explique d'entrée de jeu une des raisons et une façon de lire sa synthèse :

> [...] this is a topic where it is important to separate the effects on surface and deep

[3] Pour ce qui est des résultats obtenus des synthèses des méta-analyses, et parce que ses travaux y sont associés, il semble pertinent de souligner que l'enseignement explicite obtient une ampleur de l'effet de *d*=0,59 (avec une marge d'erreur de 0,096), toutes disciplines confondues (rajustée à *d*=0,60 en 2018). En ce qui concerne uniquement les mathématiques, le résultat pour l'enseignement explicite est un peu moindre avec *d*=0,50 (voir Proulx, 2017, pour une analyse plus détaillée des résultats pour les mathématiques).

Chroniques
fondements et epistemologie de l'activite mathematique
foundations and epistemology of mathematical activity

> knowledge and understanding. For surface knowledge, problem-based learning can have limited and even negative effects, whereas for deeper learning, when students already have the surface level knowledge, problem-based learning can have positive effects. This should not be surprising, as problem-based learning places more emphasis on meaning and understanding than on reproduction, acquisition, or surface level knowledge. (p. 211)

Malgré le peu d'effets pour le contenu (avec un *d* parfois même négatif), certaines des études ont des retombées importantes pour des dimensions relatives à l'activité mathématique. À titre d'exemple, certaines de ces études obtiennent *d*=0,66 pour le développement d'habiletés de résolution de problème, une autre étude *d*=0,40 pour les habiletés de résolution et l'application de connaissances, et *d*=0,75 pour les relations entre les concepts. D'autres études ont aussi donné des résultats intéressants : *d*=0,54 pour l'autonomie en résolution de problèmes et *d*=0,30 pour les habiletés de résolution de problèmes.

Cette courte analyse des synthèses réalisées par Hattie et son équipe révèle explicitement l'impact de la résolution de problèmes, et pour l'enseignement des mathématiques, en ce qui concerne les habiletés en résolution de problèmes, soit la modélisation, la déduction, la création d'inférences, l'utilisation d'heuristiques, l'établissement de liens et de généralisations, la pensée critique, etc. Les résultats sont éloquents, particulièrement pour l'approche entière par résolution de problèmes, qui obtient un *d*=0,68.

Ces méta-analyses représentent des exemples de travaux en éducation touchant aux dimensions de la résolution de problèmes en enseignement des mathématiques, ici centrés sur des recherches quantitatives sur les performances et apprentissages des élèves. Toutefois, ces travaux ne représentent qu'une parcelle, qu'un créneau, des recherches conduites portant sur la résolution de problèmes en enseignement des mathématiques. La prochaine section présente divers travaux de recherche en *mathematics education*, effectués à partir de cadres, méthodologies et objectifs de recherche différents, qui offrent une deuxième couche de résultats de recherche sur les retombées de la résolution de problèmes en enseignement des mathématiques.

Travaux en *mathematics education* : résolution de problèmes et variétés de *research evidence*

L'intérêt pour la résolution de problèmes en enseignement des mathématiques n'est pas nouveau. Plusieurs chercheurs, enseignants, mathématiciens, philosophes, etc., de tous azimuts, ont fait ressortir des retombées ou avantages de ce type de travail chez les élèves. En rafale, les études en *mathematics education* ont révélé des retombées directes sur :

- le développement de connaissances mathématiques chez les élèves (Cai, 2004; Lester, 1994; Taplin, s.d.);
- le transfert de ces connaissances dans d'autres tâches mathématiques et dans des situations de la vie quotidienne (Boaler, 1998, 1999; English & Sriraman, 2010; English & Gainsburg, 2015);
- le sens mathématique que donnent les élèves aux concepts *versus* des compréhensions uniquement procédurales (Cai, 2004; Schoenfeld, 1988, 2013);
- la pertinence des mathématiques apprises pour la vie quotidienne et la préparation du citoyen (Boaler, 1998, 1999; English & Sriraman, 2010; English & Gainsburg, 2015);
- le développement de l'autonomie chez les élèves (Boaler, 1998);
- l'accessibilité des mathématiques par un travail plus concret (*hands-on*) de résolution personnelle des problèmes *versus* la réception et la mémorisation de concepts mathématiques venant de l'extérieur (NCTM, 2000);
- l'engagement actif et la motivation des élèves en classe de mathématiques (Boaler, 1998; Borasi, 1996; Messenger & Ames, 2004; Papert, 1980, 1996);

- l'ampleur et la profondeur des apprentissages mathématiques chez les élèves (Borasi, 1992, 1996; Lampert, 1990);
- le développement de la pensée logique et la pensée critique (Borasi, 1992; Taplin, s.d.);
- le développement de façons mathématiques de lire et concevoir le monde, d'être *mathematically literate* (Levasseur & Cuoco, 2004; Goldenberg, Shteingold & Feurzig, 2004);
- l'appréciation esthétique, la beauté, des mathématiques et (l'expérimentation de) leur puissance pour comprendre le monde qui nous entoure (NCTM, 1989).

Cette liste est imposante. Elle fait état de résultats divers et de retombées variées de la résolution de problèmes en enseignement des mathématiques. Trois différences ressortent des résultats des études en *mathematics education* en comparaison avec ceux concernant les méta-analyses.

Dans un premier temps, les travaux sur les méta-analyses s'intéressent à la réussite des élèves, traduit par l'apprentissage de ce qui a été présenté en classe, vérifié par leurs réponses à un test qui suit l'enseignement divulgué (Hattie, 2009, p. 14). Dit plus simplement, les réussites des élèves sont mesurées par des tests pré- et post-enseignement. Une première différence concerne donc la nature de ce que représente la « réussite » des élèves. En *mathematics education*, cette réussite prend diverses formes, comme l'illustre la liste ci-dessus, allant du développement de compréhensions au développement d'une autonomie chez les élèves, en passant par la motivation et l'appréciation des mathématiques. En ce sens, ce que signifie la réussite des élèves en contexte résolution de problèmes est varié en *mathematics education* et peut toucher des dimensions non-restreintes à la compréhension d'un concept mathématique ou à la réussite à un test post-enseignement.

Une deuxième différence se situe dans les façons de « vérifier » cette réussite. Alors que dans le cas des études recensées dans les méta-analyses ceci se limitait aux pré- et post-tests, les travaux en *mathematics education* procèdent souvent par observations, par évaluations dans le cadre d'entretiens (sans nécessairement avoir une pré-évaluation), par l'analyse des discours en salle de classe, par la nature des stratégies déployées dans l'action de la classe, etc., et souvent sans avoir décidé à l'avance des éléments précis à mesurer, certains émergeant de façon naturelle à travers les collectes de données (par exemple : l'enthousiasme des enfants à résoudre des problèmes, leurs réactions spontanées et leurs questionnements face aux réponses données par les autres élèves, leur créativité à résoudre certains problèmes, poser des questions et inventer des chemins non-prévus). Ces résultats proviennent d'analyse d'événements s'étant passés en cours de recherche, et rarement à partir d'un comparatif avant-après sur des dimensions pré-ciblées.

Finalement, une troisième différence concerne les méthodologies utilisées pour parvenir à ces résultats de recherche. Dans le cas des méta-analyses, les études recensées sont de l'ordre des essais comparatifs randomisés, soit des études avec groupes témoins dans lesquelles, par exemple, un groupe reçoit un traitement ou profite d'une intervention, et l'autre pas. Les études en *mathematics education* sont au contraire variées, et font rarement appel à des groupes témoins : les élèves vivent tous les mêmes expériences de participation et les chercheurs étudient ce qui se produit, sans nécessairement comparer avec une situation antérieure. Ainsi, ces recherches font usage de méthodologies variées, souvent qualitatives, certaines étant basées sur des observations à long ou court terme, d'autres sur des observations-participantes, d'autres sur des *Teaching Experiments* réalisés en classe par les chercheurs, d'autres encore sur des rapports d'expériences à travers des *self-studies*, etc. Toutes ces collectes et analyses de données sont régies par des dimensions éthiques, scientifiques et méthodologiques différentes (pour une discussion de ces dimensions en recherches qualitatives, voir Osana & Proulx, 2018; Proulx, 2019).

Chroniques
fondements et epistemologie de l'activite mathematique
foundations and epistemology of mathematical activity

Ces trois différences font que les recherches en *mathematics education* se distinguent des travaux des méta-analyses en éducation. Par contre, et c'est ce qui rejoint le propos ici, bien que les études soient différentes les conclusions tirées des deux types d'études s'alignent. En effet, l'importance et la récurrence des retombées soulignées ci-dessus chez les élèves, à travers une variété d'études, a mené plusieurs chercheurs, tel que Stein, Boaler et Silver (2004, p. 248), à affirmer que les travaux en *mathematics education* ont produit des *consistent findings* concernant l'impact chez les élèves du travail en résolution de problèmes et représentent des *research evidence* solides et cohérentes.

En particulier, toute la question de la transformation positive des attitudes mathématiques chez les élèves concernant leur perception et appréciation des mathématiques, leur engagement, leur motivation et leur intérêt envers la discipline, soit ce qui est souvent appelé leur rapport au savoir mathématique (Charlot, Bautier & Rochex, 1992), est importante en résolution de problèmes et ouvre vers des retombées plus exhaustives que des améliorations de résultats scolaires chez les élèves. La prochaine sous-section traite de cette dimension.

Le rapport au savoir et la résolution de problèmes

Avec le rapport au savoir, il n'est pas uniquement question d'un impact sur l'augmentation des notes à des tests, ou d'une augmentation du taux de diplomation, mais d'un impact sur l'expérience des élèves en classe de mathématiques. Lorsque l'importance de l'engagement de l'élève dans son cheminement mathématique est prise en compte (voir aussi NRC, 2001, sur *productive disposition*), cette dimension du rapport au savoir peut même être vue comme centrale en mathématiques pour les élèves. En effet, plusieurs chercheurs voient l'évolution de cette dimension comme une réussite scolaire de premier plan, qui influence cet engagement de l'élève en mathématiques.

Dans son étude de 1988, Schoenfeld montre que des élèves d'une classe dite traditionnelle (axée sur les procédures et leur application, sur l'enseignement explicite de contenus, sur l'insistance sur la mémorisation, etc.) en viennent à développer une perception des mathématiques ne favorisant pas nécessairement l'engagement mathématique des élèves en classe. Schoenfeld (1992) présente un résumé de toutes ces idées sous forme d'une liste de croyances développées par les élèves à propos des mathématiques :

- Les problèmes mathématiques ont une bonne réponse et une seule ;
- Il n'y a qu'une seule bonne façon de solutionner n'importe quel problème mathématique : habituellement par la règle expliquée récemment par l'enseignant ;
- Les élèves ordinaires ne peuvent pas s'attendre à comprendre les problèmes mathématiques. Ils s'attendent à les mémoriser et les appliquer à ce qu'ils ont appris mécaniquement ;
- Les mathématiques sont une activité à laquelle s'adonner en solitaire ;
- Les élèves ayant compris les mathématiques étudiées seront capables de résoudre des problèmes en moins de cinq minutes ;
- Les mathématiques apprises à l'école n'ont rien à voir avec le monde réel ;
- Les preuves formelles sont inutiles au processus de découverte et d'invention.

Schoenfeld affirme que ces croyances, peu porteuses pour la réussite au sens large de l'élève en mathématiques, ne tombent pas du ciel et se développent à même la classe, soit l'environnement mathématique dans lequel les élèves sont plongés : « The point I wish to stress here is that students develop their understanding of the mathematics from their classroom experience with it. » (p. 161)

C'est en ce sens que l'impact de l'environnement mathématique joue un rôle pour le développement du rapport au savoir mathématique de l'élève et son engagement en mathématiques. Plusieurs travaux ont souligné de façon systématique les retombées d'un environnement de résolution de problème sur ce rapport au savoir. Ces retombées se situent tant au niveau du développement de la débrouillardise et de l'autonomie chez les élèves (Boaler, 1998, 1999; Theis & Gagnon, 2013), du développement de la confiance en soi en contexte mathématique (Taplin, s.d.; Schifter & Fosnot, 1983), de la perception positive de ce que sont les mathématiques et de leurs utilités (Boaler, 1998, 1999; Borasi, 1992, 1996; Cai, 2004), que des aptitudes méta-mathématiques pour s'investir dans un problème et y réfléchir (capacités et envie de creuser, d'explorer, de se questionner, de persévérer, etc.; voir Boaler, 1998, 1999; Borasi, 1992, 1996). L'importance de ces attitudes positives se retrouvent aussi dans le Fascicule K (MEQ, 1988), ouvrage important au Québec sur la résolution de problèmes en enseignement des mathématiques :

> [L]a résolution de problèmes en mathématiques constitue un moyen important : pour développer plusieurs attitudes d'ordre affectif (attitudes positives face aux mathématiques et par rapport à la résolution de problèmes, confiance en soi, etc.); pour développer le sentiment d'appropriation de la connaissance mathématique; pour contribuer *au développement* de certaines attitudes d'ordre social favorisant le travail en équipe, etc. (MEQ, 1988, p. 54)

C'est aussi en ce sens que Cai (2004), dans sa recension des écrits, montre que le travail en résolution de problèmes a comme impact chez de nombreux élèves de faire voir positivement les mathématiques comme une activité créatrice et intellectuellement engageante, ce que Schoenfeld (2013) résume en ces termes : « problem-solving makes mathematics an exciting sense-making domain » (p. 28). Et dans ces engouements et engagements mathématiques, la question des défis à relever et des obstacles à franchir semble jouer un rôle important. Taplin (s.d.) explique par exemple que la résolution de problèmes permet à l'élève de développer une appréciation des défis de même que de l'excitation à surpasser les embûches, ce que plusieurs considèrent fondamental pour le développement d'attitudes et d'aptitudes mathématiques, ce qui rejoint des dimensions méta de l'activité mathématique.

Du rapport au savoir aux dimensions méta-mathématiques

Borasi, qui a travaillé la résolution de problèmes dans plusieurs contextes, soit avec des petits groupes de deux à dix élèves ou encore des groupes d'enseignants et futurs enseignants, résume ainsi ses intentions comme enseignante :

> I wanted to use the students' specific inquiry [...] as a way to encourage them to reflect on the nature of mathematics, to invite them to challenge and reconceive their view of mathematics, to become more confident in their ability to do mathematics, and take a more active stance as mathematical learners. (1992, p. 8)

Dans ce contexte de résolution de problèmes, elle explique travailler implicitement sur des dimensions méta-mathématiques qui permettent aux élèves : de voir que les résultats et compréhensions mathématiques ne sont pas prédéterminés ou parachutés, et se construisent dans l'activité même ; que les vérités mathématiques ne sont pas absolues et évoluent avec le temps ; que ces vérités et leurs adéquations dépendent du contexte dans lequel ils sont utilisés et expliqués ; que l'ambiguïté et les limites des raisonnements font partie intégrante des mathématiques et sont importantes pour continuer à les faire avancer.

Borasi fait écho à plusieurs travaux en philosophie des mathématiques (Davis & Hersh, 1981 ; Wilder, 1993 ; Tymoczko, 1986), qui insistent sur les retombées du travail en résolution de problèmes au regard des réflexions sur la nature des mathématiques et de son activité (e.g. 1996, pp. 260-263). Elle tire de ses travaux une panoplie d'impacts suite à l'analyse de l'activité mathématique des élèves. En particulier, elle explique que le travail d'investigation et de résolution de problèmes a permis aux élèves de :

Chroniques
fondements et epistemologie de l'activite mathematique
foundations and epistemology of mathematical activity

- vivre des doutes et conflits constructifs en mathématiques ;
- poursuivre librement des explorations mathématiques (se donner le droit d'investiguer leurs intérêts personnels en mathématiques) ;
- de s'engager profondément dans la résolution de problèmes comportant un défi (et ne pas se laisser décourager) ;
- de vivre le besoin de surveiller, contrôler et justifier leur travail mathématique ;
- de prendre des initiatives et développer un sentiment d'appartenance face aux mathématiques qu'ils apprennent ;
- de réfléchir à la nature même des mathématiques ;
- de reconnaître les dimensions humaines des mathématiques ;
- de verbaliser et mettre en mots leurs compréhensions mathématiques et donc de les communiquer ;
- de développer une compréhension plus juste de ce qu'impliquent les mathématiques comme activité ;
- de développer une compréhension plus profonde des contenus mathématiques travaillés à travers les problèmes ;
- de développer leurs capacités à faire des mathématiques ;
- de développer une plus grande confiance en leurs capacités d'apprendre et d'utiliser les mathématiques (Borasi, 1996, pp. 143-147).

Ces retombées sont éloquentes pour toute l'expérience et la compréhension mathématiques que les élèves peuvent soutirer d'un travail axé sur la résolution de problèmes. C'est en ce sens, tel que mentionné plus haut, qu'il est possible d'affirmer que les recherches en *mathematics education* ont produit des *research evidence* sur l'impact chez les élèves de la résolution de problèmes en enseignement des mathématiques.

La prochaine section aborde le troisième angle, soit les travaux en didactique des mathématiques, qui sont eux aussi différents des deux premiers. Avant, toutefois, une clarification s'impose sur la notion de « problème » en mathématiques.

Sur la notion de « problème » en mathématiques

Chaque personne qui parle de résolution de problèmes a un peu sa propre définition du mot problème, avec ses exigences et caractéristiques : « Un problème ne peut pas être un exercice » / « Un problème doit avoir *x* étapes » / « Un problème doit faire en sorte que l'élève s'engage » / « Un problème implique un obstacle » / « Un problème suppose la combinaison et la mobilisation nouvelle de connaissances » / etc. Tout ceci est à la fois vrai et faux. Ces caractéristiques ont de la valeur, mais elles ne font pas office de prescriptions sur ce qu'est un problème en mathématiques.

Les études réalisées sur la résolution de problèmes en enseignement des mathématiques, autant par des méta-analyses, par des recherches en *mathematics education* que par celles dont il sera maintenant question en didactique des mathématiques, concernent une variété de problèmes, allant des plus complexes aux plus simples. Borasi (1986) propose une liste des possibilités de problèmes en classe de mathématiques, dont plusieurs recherches s'inspirent, allant d'énoncés simples et courts, voire d'exercices, à des activités complexes, en passant par des énigmes, des jeux, des problèmes mal définis, de grandes situations, etc. Tous peuvent servir de problèmes, car ce qui caractérise les études menées sur la résolution de problèmes est qu'un problème se définit autant par ce qui est donné aux élèves, que par son investigation et les questions qu'il suscite en cours de route : le problème est une entité dynamique, qui évolue et se transforme au fil de sa résolution. Pour English et Gainsburg (2015), et dans le Fascicule K (MEQ, 1988), un problème « devient » un problème en fonction de ce qui est demandé à l'élève et de ce qui en découle, et non uniquement en fonction de son énoncé avec des caractéristiques tracées d'avance.

C'est en ce sens que la classification de Borasi est intéressante, dans laquelle toute tâche, quelle que soit sa nature « initiale », a le potentiel autant de devenir un problème que de se réduire à un

Chroniques
fondements et epistemologie de l'activite mathematique
foundations and epistemology of mathematical activity

exercice répétitif : même le travail d'une preuve mathématique perd de son intérêt mathématique une fois mémorisée; une situation problème bourrée d'obstacles peut ne plus représenter un très grand défi une fois résolue ou corrigée (ou encore si proposée à un élève plus âgé).

Cette situation ajoute aux analyses des méta-analyses et des travaux en *mathematics education*, dans lesquels un éventail de problèmes produisent toutes ces retombées chez les élèves. Cette variété est aussi présente dans les travaux effectués en didactique des mathématiques, que la prochaine section aborde. C'est également ce qui explique pourquoi je ne m'attarde pas à une analyse des types de problèmes utilisés pour l'ensemble des recherches citées. Évidemment, je ne prétends pas qu'une analyse fine des problèmes et de leurs contextes de résolution ne serait pas valable ou pertinente, mais celle-ci n'enrichirait guère le discours qui nous concerne en ce moment.

Travaux en didactique des mathématiques : résolution de problèmes et avancement des mathématiques

Que signifie didactique des mathématiques et qu'est-ce qui caractérise les travaux qui s'y inscrivent? Tel que l'exprime Douady (1984), les travaux en didactique des mathématiques étudient les processus et conditions de transmission, d'acquisition et de production des mathématiques, et ne se réduisent pas à la recherche des bonnes manières d'enseigner les notions mathématiques. En outre, Brousseau offre cette définition :

> Science s'intéressant à la production et à la communication des connaissances mathématiques dans ce que cette production et cette communication ont de spécifique de ces connaissances. La didactique des mathématiques étudie la façon dont les connaissances sont créées, communiquées et employées pour la satisfaction des besoins des hommes vivant en société. (Brousseau, 1991)

Ce qui ressort de ces orientations (et d'autres comme Bednarz, 2001, et Chevallard, 1989, le soulignent aussi ; voir Proulx, 2013) est l'importance des questions mathématiques au cœur de l'étude de phénomènes relatifs au processus de transmission, d'acquisition et de production des mathématiques, soit à l'avancée des mathématiques. Les mathématiques et leur spécificité, pour le didacticien des mathématiques, sont centrales pour aborder les questions relatives à l'enseignement des mathématiques.

Cette perspective distingue l'approche en didactique des mathématiques des autres approches. Le didacticien des mathématiques aborde les questions d'enseignement des mathématiques *par* les mathématiques, c'est-à-dire qu'il s'intéresse aux expériences et activités mathématiques dans ce qu'elles ont de représentatives et spécifiques des mathématiques elles-mêmes. Dans cette optique, l'intérêt envers la résolution de problèmes pour un didacticien des mathématiques s'explique non pas parce que cette approche permet de mieux faire apprendre telle ou telle notion ou parce que les élèves arriveraient à mieux réussir leur examen, mais plutôt parce que les mathématiques se définissent à travers la résolution de problèmes comme activité mathématique (Brown & Walter, 2005; Freudenthal, 1971; Lockhart, 2009; Papert, 1972, 1996; Polya, 1957). C'est pour cette raison que les didacticiens des mathématiques vont réaliser des études sur la résolution de problèmes ou argumenter sa place à l'école : c'est parce qu'elle est constitutive de la discipline mathématique.

Tout travail de recherche en didactique des mathématiques ne se fera jamais au détriment des mathématiques elles-mêmes, car elles sont mises au premier plan, quelle que soit l'intention de « réussite », de « performance » ou d'appréciation et de motivation des élèves. Évidemment, ce n'est pas que le didacticien ne s'intéresse pas à la réussite des élèves, car il l'étudie, mais il le fait dans une optique de mieux comprendre le processus de transmission, de transformation et de production des mathématiques. En d'autres mots, les travaux de recherche en didactique des mathématiques s'intéressent à l'avancée et au développement, voire à l'émergence, des mathématiques. Les travaux en résolution de problèmes doivent être vus sous cet angle en didactique des mathématiques, à travers des questions du type :

En quoi la résolution de problèmes en classe de mathématiques est-elle didactique, c'est-à-dire comment permet-elle de faire avancer les mathématiques de la classe?

L'avancement des mathématiques : une double entrée

La question de l'avancement des mathématiques en salle de classe s'aborde sous deux angles : celui relatif aux contenus et méthodes mathématiques et celui relatif aux pratiques mathématiques.

Le premier angle est bien connu, car les mathématiques regorgent de concepts et de méthodes à travailler à l'école; des nombres à l'algèbre en passant par divers algorithmes, formules et procédures. Les analyses didactiques portent alors sur le développement de ces contenus et méthodes en classe de mathématiques, soit entre autres sur les compréhensions et raisonnements des élèves relatifs à ces contenus et méthodes mathématiques.

Toutefois, tel que l'explique Brousseau (1998, p. 39), les mathématiques ne sont pas que des contenus et représentent quelque chose qui se fait, une activité qui prend vie et se forme dans l'action (Brown & Walter, 2005; Hersh, 2014; Papert, 1980, 1996). En mathématiques, en plus des contenus et des méthodes, la manière de les approcher et de les explorer est aussi importante. Il est alors question d'engager les élèves dans une culture où des pratiques mathématiques se déploient, comme le précise Bauersfeld (1994) :

> Participer au processus mathématique de la classe, c'est aussi participer à une culture qui utilise les mathématiques ou, mieux encore, à une culture de mathématisation. (p. 177)

Ainsi, le deuxième angle pour l'avancement des mathématiques en classe concerne le développement de pratiques de mathématisation chez les élèves, à travers l'immersion dans un environnement, une culture mathématique, où les mathématiques se font, se créent, se produisent, etc. Dans l'établissement de telles pratiques de mathématisation, les élèves sont encouragés : à générer des idées, des questions et des problèmes; à rendre explicites et à exprimer leurs compréhensions; à négocier les sens construits; à élaborer des explications et des arguments à l'appui des solutions avancées; à explorer des avenues différentes pour comprendre des problèmes, des concepts, des notations et des symbolisations; à échanger des représentations variées, des solutions et des stratégies; à valider les solutions mises en avant par eux et par les autres; etc. En ce sens, un certain nombre d'éléments permettant de caractériser le déploiement de pratiques de mathématisation en classe peut être soulevé :

- *La communication et l'émergence d'une communauté de validation*. Au cœur d'une pratique où les mathématiques se font, les participants sont amenés à expliquer, discuter, argumenter, négocier et valider les compréhensions et le sens développés (Devlin, 2004; Hersh, 1997; Krummheuer, 1995; Lakatos, 1976).
- *Le rôle, la pertinence et l'élaboration de langages et symbolismes mathématiques*. Le symbolisme, et sa construction, jouent et ont joué un rôle majeur dans la création de sens en mathématiques (Bednarz, Dufour-Janvier, Poirier & Bacon, 1993). Il intervient aussi de façon centrale dans les constructions mathématiques des élèves (Bednarz et al., *ibid.* ; Byers & Erlwanger, 1984). De plus, divers niveaux de langage, les analogies, les métaphores, etc., sont utilisés pour exprimer les compréhensions, explications et arguments mathématiques. Ceux-ci peuvent s'avérer des aspects clés pour faire des liens et créer des compréhensions additionnelles (Bauersfeld, 1994; Bednarz, 2001, 2005 ; Lakoff & Núñez, 2000).

- *Le rôle accordé aux erreurs et la façon de les traiter*. Les erreurs jouent et ont joué un rôle fondamental dans le développement de la pensée et des raisonnements mathématiques ; elles permettent de percevoir, comprendre et construire différemment les concepts et mènent à des façons de faire nouvelles, souvent imprévues (Hadamard, 1945; Hersh, 1997; Lakatos, 1976).
- *La résolution et la formulation de problèmes*. Faire des mathématiques est une activité centrée sur la construction et la résolution de problèmes (Bkouche, Charlot & Rouche, 1992; Devlin, 2004; Hersh, 1997; Lang, 1985). Toute exploration des idées, concepts et situations mathématiques, ou toute tentative pour donner du sens et élaborer des explications en lien avec des concepts et idées mathématiques, sont des illustrations de formulation de questions, de problématisation et de résolution de problèmes.
- *L'appartenance, la responsabilisation et l'*authorship *en mathématiques*. Faire des mathématiques amène à produire, créer et communiquer des mathématiques (Burton, 2004). C'est établir une relation étroite entre ce qui est produit et celui qui les produit (Papert, 1980, 1996; Povey & Burton, 1999). Les mathématiciens ne se voient pas uniquement comme des consommateurs d'idées mathématiques ou comme des récepteurs, mais aussi comme des créateurs, voire des auteurs de mathématiques; c'est un processus actif et dynamique. Les mathématiques confèrent une double responsabilité, tel que le souligne Borasi (1996), là où les participants sont responsables des mathématiques qu'ils produisent, mais aussi responsables d'en produire. Chaque personne qui fait des mathématiques est perçue comme auteur, comme créateur des mathématiques qu'il est en train de faire (Schoenfeld, 1994).

Maillé aux contenus et méthodes mathématiques, l'élaboration, le développement et le déploiement de pratiques de mathématisation deviennent une dimension fondamentale à considérer au regard des apports didactiques de la résolution de problèmes en enseignement des mathématiques, soit pour l'avancée des mathématiques en classe. Lampert (1990a) parle en ce sens de travailler simultanément dans l'enseignement sur ce double-agenda, soit le *of* et le *about mathematics* :

> This meant that I needed to work on two teaching agendas simultaneously. One agenda was related to the goal of students' acquiring technical skills and knowledge in the discipline, which could be called knowledge *of* mathematics, or mathematical content. The other agenda, of course, was working toward the goal of students' acquiring the skills and disposition necessary to participate in disciplinary discourses, which could be called knowledge *about* mathematics, or mathematical practice. (p. 44)

Dans cette perspective didactique pour l'avancement des mathématiques en classe, la question centrale devient la suivante :

En quoi la résolution de problèmes en classe de mathématique permet-elle de faire avancer les mathématiques, sous ses deux angles de contenus et méthodes et de pratiques de mathématisation ?

Pour illustrer comment aborder cette question de recherche, ce qui suit présente un extrait d'une séance menée en salle de classe avec des élèves suivie par une analyse didactique concise des éléments soulevés ci-dessus.

Quelques éléments méthodologiques au cœur du contexte de la recherche

Dans le cadre des recherches menées au sein du *Laboratoire Épistémologie et Activité Mathématique* (www.leam.uqam.ca), nous collaborons avec des enseignants qui nous invitent sur une base régulière dans leurs classes, afin d'expérimenter différentes approches de résolution de problèmes et d'interagir, analyser et réfléchir avec eux sur le déroulement de ces séances. Comme ils prennent place dans les classes et ne veulent pas perturber leur fonctionnement, nos travaux de recherche s'insèrent dans les planifications prévues des enseignants : les tâches données aux élèves sont choisies avec les enseignants et proviennent soit de notre propre matériel ou du leur. Ainsi, il arrive que certaines tâches données aux élèves soient très simples, provenant de manuels scolaires ou de cahiers d'exercices, ou encore plus complexes. Dans la plupart des cas, c'est le chercheur lui-même qui agit comme enseignant, utilisant justement ce rôle d'enseignant comme « moyen scientifique pour faire la collecte de données » (Steffe, 2017) sur la résolution de problèmes en classe de mathématiques.

Les séances en classe suivent normalement le même format : le chercheur-enseignant démarre la séance avec une tâche présentée aux élèves (écrite au tableau, donnée oralement ou encore sur papier, selon la nature de la tâche), qui ont un temps variable pour la résoudre (seuls ou en équipe). Qu'elles soient simples ou complexes, ces tâches à résoudre jouent le rôle de déclencheurs, de points de départ, pour les explorations mathématiques de la classe en contexte de résolution de problèmes. Une fois la tâche donnée et les explorations mathématiques démarrées, les élèves sont invités à exprimer leurs stratégies et solutions à la classe, en plénière, toujours en expliquant et en justifiant leurs raisonnements. Les élèves sont aussi amenés à interagir entre eux à propos des stratégies et solutions mathématiques proposées, à se questionner, à compléter les idées, à faire des liens entre les solutions, etc. La séance plénière est structurée autour et à partir des interactions dans la classe (i.e. entre le chercheur-enseignant et les élèves, et entre les élèves) au sujet des stratégies, solutions et idées échangées. Ces nombreuses interactions provoquent fréquemment de nouvelles investigations, invitant les élèves à creuser des idées et questions émergentes (Cobb et al., 1994), encore une fois seuls ou en équipe.

Durant ce travail en classe avec les élèves, et pour répondre aux objectifs de recherche relatifs à l'activité mathématique des élèves, le rôle du chercheur-enseignant, tel que l'explique Steffe (1991), est de pousser et de creuser les idées échangées par les élèves en cours de résolution. Par des questions, des commentaires, des comparaisons entre solutions, des demandes de clarification et des relances, le chercheur-enseignant engage les élèves à formuler leurs idées et à approfondir le sens donné à celles-ci. L'intention didactique est d'étudier l'avancée des mathématiques en classe. Le chercheur-enseignant tente, par ses interventions, de provoquer et de stimuler cette avancée, et de la faire émerger. À travers cette investigation des productions mathématiques des élèves, les idées du chercheur-enseignant – autant que ses surprises, ses incertitudes et ses propres questionnements et explorations – font entièrement partie de la séance.

En effet, plutôt que de penser ces séances comme une fenêtre donnant accès aux explorations « naturelles » de la classe, non influencée par un intervenant externe, les analyses mettent à l'avant-plan la façon dynamique et co-dépendante avec laquelle les mathématiques ont été produites et explorées durant la séance. C'est aussi en ce sens que les séances ne sont pas conçues comme des situations pour lesquelles les productions et explorations mathématiques sont prédéterminées ou préexistantes à la résolution des tâches : les productions et explorations mathématiques de la classe sont contingentes aux événements de la classe elle-même, soit à l'environnement mathématique créé par les interactions entre élèves et avec le chercheur-enseignant. En bref, les productions et explorations mathématiques entreprises, et ce qui en émerge, sont continuellement formées et négociées par la classe (élève et chercheur-enseignant ensemble), rendant le tout difficilement reproductible.

Selon Nemirovsky (2005), un des défis de l'analyse des productions mathématiques des élèves est de considérer et décrire ces productions, ainsi que les événements survenus autour d'eux, sans essayer de poser un « diagnostic » : « Cette solution est bonne/mauvaise » / « Cet élève a telle et telle conception erronée » / « Le chercheur-enseignant aurait dû poser une autre question » / « Cet élève a tel type de compréhension » / « Les élèves confondent cette idée avec une autre » / etc.

Le fait de ne pas essayer de poser un diagnostic permet d'apprécier pour elles-mêmes les mathématiques produites, en mettant de côté nos propres tendances à comparer en imposant un référent externe; ce qui est exigeant et demande beaucoup d'auto-conscientisation.

Comme chercheurs dans notre Laboratoire, nous trouvons important d'éviter de poser ces diagnostics, parce que cette attitude nous empêche de voir quoi que ce soit de nouveau au cœur des mathématiques produites par les élèves, en se rapportant à des mathématiques externes déjà toutes faites et pensées : une telle attitude nous amène à nous répéter nous-mêmes, à tomber dans une vision déficitaire du travail mathématique (voir Proulx, 2018), et n'aide guère à aborder nos questions de recherche sur l'avancement des mathématiques en classe. Ainsi, plutôt que de juger ou comparer à partir d'un référent externe les stratégies et idées mathématiques échangées dans la classe (ce que Steffe, 1991, appelle un *first-order modelling*), les analyses tentent de reconnaître les mathématiques produites en classe et de leur donner un sens sur leurs propres termes (ce que Steffe appelle alors un *second-order modelling*). De plus, ancrés dans la théorie de l'observateur de Maturana (e.g. 1987, 1988), nos intentions sont de donner du sens aux façons de donner du sens des autres, et de tenter de comprendre les idées et stratégies mathématiques en adoptant leurs points de vue mathématiques (Proulx, 2016).

Un exemple d'exploration et d'investigation mathématiques

Pour illustrer la nature du travail réalisé avec les élèves, ce qui suit présente un extrait d'une séance de 75 minutes menée avec une trentaine d'élèves de Secondaire 4 (15-16 ans).

Le thème de la séance est la géométrie analytique des distances dans le plan (points de croisement, de partage, distance entre deux points, etc.). Les élèves avaient déjà abordé les formules algébriques usuelles (par exemple, (D=$\sqrt{(x_1-x_2)^2+\ (y_1-y_2)^2}$). La tâche proposée aux élèves est simple et concerne la distance entre deux points dans le plan cartésien : « Trouvez la distance entre les points (0,0) et (4,3) » (avec un plan cartésien affiché au tableau sur lequel les deux points sont tracés). Cette tâche a été donnée en contexte de calcul mental, suite à la demande de l'enseignant de la classe pour voir quel type d'activité mathématique ses élèves déploieraient dans un tel contexte. Les élèves disposaient d'une quinzaine de secondes pour résoudre la tâche, sans recours au support papier-crayon ni à d'autres aides matérielles. Après ce délai, ceux-ci ont été invités à expliquer leur solution (complète ou non) et leur façon d'y parvenir. Voici le déroulement synthétique et chronologique de leurs explorations, qui s'est étalé sur une période de 40 minutes.

Stratégie A

Un élève explique avoir trouvé la réponse en appliquant la formule usuelle pour la distance (D=$\sqrt{(x_1-x_2)^2+\ (y_1-y_2)^2}$), soit en faisant 4-0=4 et 3-0=3, mettant ensuite chaque résultat au carré avant de les additionner. Prendre la racine carrée de cette somme lui permet d'obtenir une distance de 5 unités.

Stratégie B

Un autre élève explique qu'il est possible de tracer un triangle, puis d'utiliser la relation de Pythagore. Pour trouver la valeur des cathètes du triangle, il compte le nombre de « carrés » d'un point à l'autre (soit 3 et 4, que le chercheur-enseignant indique sur le dessin). Il dit ensuite chercher l'hypoténuse en élevant 3 et 4 au carré, en additionnant les carrés, puis en trouvant la racine carrée de la somme ainsi obtenue (Figure 1).

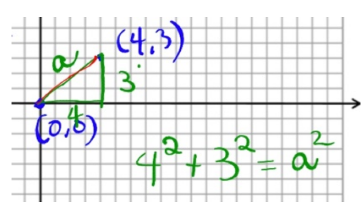


Figure 1 – Le triangle tracé pour rejoindre les points

Stratégie C

Une élève explique qu'il est possible de compter les points entre (0,0) et (4,3). Au tableau, elle trace en rouge un segment entre (0,0) et (4,3) sur le triangle précédent (Figure 2). Partant de (0,0), elle compte alors

Chroniques
fondements et epistemologie de l'activite mathematique
foundations and epistemology of mathematical activity

le nombre de de croisement parcourus sur ce segment rouge jusqu'à (4,3), soit en quelques sortes le nombre de diagonales de carrés-unités. Elle s'arrête toutefois et affirme que le segment en rouge ne passe pas exactement sur toutes les diagonales des carrés-unités et que, par conséquent, le comptage est difficile à faire.

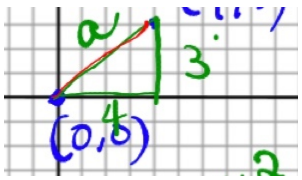


Figure 2 – Ligne rouge tracée sur le triangle

Pour l'aider à expliquer sa stratégie, même si elle a été infructueuse, le chercheur-enseignant trace plus bas sur le tableau un segment qui passe par deux autres points fictifs, mais exactement par toutes les diagonales des carrés-unités. De cette façon, le nombre de diagonales franchies par le segment, ici 4, peut être compté directement (Figure 3).

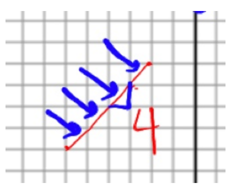
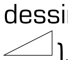
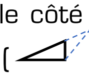


Figure 3 – Segment de droite croisant toutes les diagonales des carrés-unités

Le chercheur-enseignant demande alors si la longueur de la diagonale du carré-unité est la même que celle du côté de ce même carré, auparavant utilisé pour déterminer la longueur de la cathète du triangle (en dessinant au tableau un carré-unité traversé d'une diagonale ).

Une élève affirme que les deux longueurs ne sont pas les mêmes, car la diagonale d'un carré n'est pas de la même longueur que son côté. Un élève dit qu'il est certain que ces deux longueurs sont différentes, car l'hypoténuse est toujours le plus grand côté d'un triangle. Une autre élève explique que la diagonale est plus grande, car elle est en face de l'angle le plus grand du triangle. Relativement à cette dernière affirmation, le chercheur-enseignant demande aux élèves si c'est toujours le cas, soit que le côté le plus grand dans un triangle se situe en face de l'angle le plus grand (en dessinant un triangle rectangle quelconque au tableau ). L'élève précédente, pointant ce dessin, affirme que l'angle faisant face au grand côté est justement plus grand. Une autre élève explique que, dans un triangle, plus l'angle est grand plus la longueur opposée est grande. Pointant le dessin, elle affirme que si le côté (hypoténuse) avait été plus long, il aurait donné un plus grand angle. Elle ajoute que, puisque la somme des angles d'un triangle donne 180°, alors l'angle droit est toujours l'angle le plus grand du triangle (parce qu'il ne reste que 90° à partager entre les deux autres angles).

Le chercheur-enseignant reprend ces derniers propos en soulignant que cela suppose que, dans un triangle, le côté qui fait face au plus grand angle est le plus grand du triangle. Reprenant le dessin du triangle rectangle, il fait varier l'angle droit vers un angle obtus et prolonge le côté associé, montrant que ce côté devient plus long (). Il transforme ensuite le même angle en un angle aigu pour voir si le côté associé à cet angle devient plus court (Figure 4).

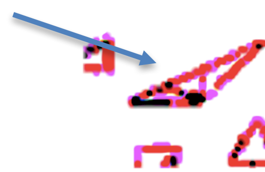


Figure 4 – Variation de l'angle et son effet sur le côté « hypoténuse » du triangle

Le chercheur-enseignant demande alors aux élèves si, avec cet angle aigu, leur « théorie » du côté opposé à l'angle est toujours valide. Plusieurs élèves font alors référence aux triangles isocèles et équilatéraux. Un élève dit que tout fonctionne pour le triangle isocèle, avec deux côtés égaux face à deux angles égaux. Un autre élève souligne que c'est aussi le cas pour le triangle équilatéral, car « c'est partout pareil » : mêmes angles et mêmes longueurs de côtés.

Le chercheur-enseignant revient par la suite sur la question des diagonales des carrés-unités et la stratégie voulant qu'il est possible de trouver la distance en les comptant. Pour faire suite aux explications des élèves voulant que la diagonale du carré est plus grande que le côté du même carré, il souligne que dans cette stratégie il suffit de compter les diagonales, c'est-à-dire le nombre de diagonales franchies par le segment d'un point à l'autre. Il ajoute que ceci représente une mesure possible, qui donnerait 4 diagonales dans l'exemple de la Figure 3. Il explique qu'il est possible d'exprimer la distance entre les deux points par la valeur de 4

Chroniques
fondements et epistemologie de l'activite mathematique
foundations and epistemology of mathematical activity

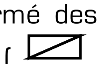
diagonales ou celle de 5 côtés de carrés-unités, ce qui donne deux mesures différentes pour la même distance[4].

Un élève ajoute que si la valeur en unités de la diagonale du carré est connue, il est possible de trouver le nombre de carrés-unités pour ce segment en le multipliant par ce « facteur ». Le chercheur-enseignant écrit 1,2 comme valeur fictive de cette diagonale, en insistant sur le fait que chacune des deux mesures obtenues est acceptable, mais qu'elles n'auraient pas les mêmes unités (carré-unité ou diagonale-unité).

Stratégie D

Un élève propose une autre solution en faisant appel à la loi des sinus, affirmant que l'angle du triangle est de 45°. Le chercheur-enseignant lui demande comment sait-il que l'angle est de 45°. Comme celui-ci ne peut pas répondre, certains élèves acceptent l'affirmation alors que d'autres expriment une réticence. Face aux divergences d'opinion entre les élèves, le chercheur-enseignant leur demande de prendre quelques minutes, seuls ou en équipe et avec leur matériel scolaire au besoin, pour explorer la question à savoir si l'angle du triangle est de 45° ou non, et d'élaborer un argument permettant de convaincre les autres élèves. Après cinq à six minutes de travail, le chercheur-enseignant demande aux élèves de reprendre leurs places et de faire part de leurs trouvailles à la classe.

Une élève explique que sur sa feuille aide-mémoire, donnée pour les aider aux examens, il y a un triangle rectangle isocèle qui possède des angles de 45°. Toutefois, avec le triangle de 4 et 3 unités de côté, il n'est pas possible d'affirmer directement que l'angle est de 45°, car ce n'est pas un triangle isocèle étant donné que les côtés ne sont pas égaux.

Le chercheur-enseignant mentionne qu'il s'agit d'une sorte de raisonnement inversé : puisque le triangle rectangle isocèle de la feuille aide-mémoire a des angles de 45° et que le triangle en question n'est pas un triangle isocèle rectangle, alors il n'est pas possible d'affirmer directement que son angle est de 45°. Une autre élève s'avance au tableau et à partir du triangle formé des points (0,0) et (4,3) complète un rectangle ( ,Figure 5). Elle explique que l'hypoténuse est la diagonale de ce rectangle, qui le coupe en deux et donc coupe aussi l'angle de 90° en deux, donnant un angle de 45°.

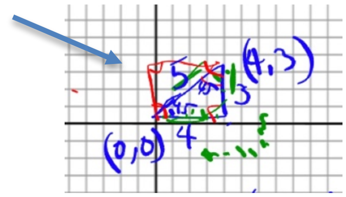


Figure 5 – Rectangle, en rouge, complété à partir du triangle

Le chercheur-enseignant reprend ici l'argument de l'élève pour la classe, à savoir que puisque la diagonale coupe le rectangle en deux parties égales, elle coupe aussi l'angle de 90° en deux parties égales. Une autre élève affirme son désaccord et dessine au tableau un rectangle avec une diagonale en disant que bien qu'elle divise le rectangle en deux rien n'assure que l'angle soit lui aussi divisé en deux parties égales (Figure 6).

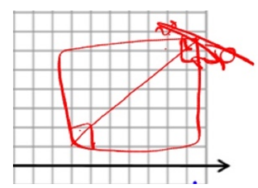


Figure 6 – Rectangle dessiné en réponse à l'affirmation que l'angle de 90° est coupé en deux parties égales

Le chercheur-enseignant reformule le désaccord de l'élève, expliquant qu'avec son exemple, qui fait ici office de contre-exemple, elle avance que même si la diagonale coupe le rectangle en deux parties égales, les angles eux ne sont pas nécessairement divisés en deux parties égales. Une autre élève complète cette idée en ajoutant que puisque les côtés du triangle ne sont pas égaux (soit de 3 et de 4), la diagonale ne coupe pas l'angle de 90° en deux angles de 45°.

Le chercheur-enseignant reformule l'affirmation de l'élève en disant qu'étant donné que les côtés du triangle ne sont pas égaux, les angles ne seront pas nécessairement égaux non plus, compte tenu de la théorie précédente, acceptée par tous, selon laquelle le plus grand côté du triangle fait face au plus grand angle du même triangle. Ici, un côté plus grand ferait face à un angle plus grand.

L'élève ayant fait référence à sa feuille aide-mémoire affirme qu'il leur arrive tous dans un examen de voir des triangles rectangles qui n'ont pas d'angles de 45°, par exemple des angles de 32° et 58°. Elle trace alors au

[4] À noter la confusion chez le chercheur-enseignant à propos de l'exemple donnant 4 diagonales, qui n'est pas celui de la distance entre (0,0) et (4,3).

tableau un exemple de ce triangle, qu'elle complète pour former un rectangle (Figure 7), expliquant que la diagonale coupe le rectangle en deux, mais sans que les angles obtenus soient de 45°.

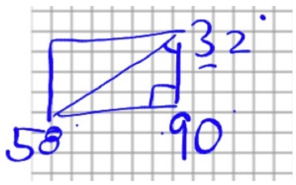


Figure 7 – Triangle contre-exemple avec angles de 32° et 58°

Le chercheur-enseignant affirme alors que l'élève offre ici un contre-exemple, avec un type de triangle rectangle qu'ils rencontrent fréquemment et qui n'a pas deux angles de 45°, faisant en sorte que les angles du triangle précédent ne sont pas nécessairement de 45°. Un élève propose ensuite d'appliquer la loi des sinus avec les données actuelles du triangle, soit sin90°/5 = sin?/4 obtenant ainsi un angle de 58,1° (résultat qui sera corrigé à 53,1° et 36,9° par la suite). Après la formulation de toutes ces idées, le chercheur-enseignant demande aux élèves comment ils se positionnent concernant l'angle de 45°.

Un des élèves ayant proposé la stratégie de la loi des sinus se rend alors au tableau et explique que, du fond de la classe, visuellement et sans mesures d'angles, l'hypoténuse du triangle semble passer directement par les points des diagonales (et couper les carrés-unités en deux), donnant l'impression de former des angles de 45°. Il ajoute que, toutefois, lorsque rendu au tableau, il devient clair que ce n'est pas le cas. Maintenant convaincus que l'angle n'est pas de 45°, les élèves expriment leur désaccord avec cette dernière affirmation. Le chercheur-enseignant ré-explique la position de l'élève en affirmant que ce dernier fait un certain *mea culpa* pour avoir insisté sur l'angle de 45° et que c'était uniquement une erreur visuelle. Les élèves demeurent toutefois en désaccord. Un élève reprend et complète ensuite l'argument précédent sur les mesures des côtés du triangle, à savoir que puisque les trois côtés du triangle sont différents, leurs angles associés seront aussi différents, reprenant ainsi la théorie du plus grand côté faisant face au plus grand angle, et donc que des côtés différents entraînent des angles différents.

En vue de conclure, le chercheur-enseignant souligne qu'un élève a proposé dans son cahier de former un carré pour évaluer l'angle de 45°. Cet élève, trop timide pour s'exprimer devant toute la classe, demande au chercheur-enseignant d'expliquer son raisonnement aux autres. Ce dernier dessine alors un triangle de 3, 4 et 5 unités de côté et prolonge la cathète de 3 unités vers une de 4 unités pour former un carré de 4 unités de côté. Reprenant les propos de l'élève et reliant ce dessin au carré-unité utilisé auparavant pour comparer la mesure de la diagonale à celle du côté du carré, le chercheur-enseignant fait valoir que ce même dessin est présent dans le carré de 4 unités de côté nouvellement dessiné. Par conséquent, si les deux angles sont de 45° dans le carré-unité initial, alors ils le sont aussi dans le carré de 4 unités de côté, donnant un triangle rectangle avec deux cathètes de 4 unités et deux angles de 45° : montrant par le fait même qu'avec le triangle de 4 et 3 unités de côté il n'est pas possible d'obtenir la même chose et que les angles sont nécessairement différents. Le chercheur-enseignant trace ensuite des arcs de cercles pour marquer les angles (un en rouge pour le triangle de mesures 4 et 3 unités et un en vert pour le triangle de 4 et 4 unités ; Figure 8).

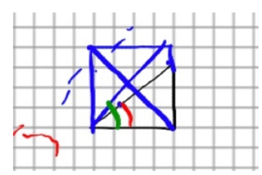


Figure 8 – Comparaison des triangles à partir du carré

Après avoir entendu les divers arguments, les élèves se disent d'accord avec le fait que l'angle n'est pas de 45°. Les stratégies pour résoudre la tâche initiale ayant toutes été explorées, la séance se continue avec la résolution d'une autre tâche.

Analyses de l'avancement des mathématiques

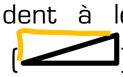
Une analyse didactique de cet extrait, relativement à l'avancement des mathématiques en classe, souligne la présence des dimensions de contenus et méthodes et de pratiques de mathématisation. Ces deux dimensions sont analysées de façon succincte.

Dans un premier temps, beaucoup de concepts et méthodes mathématiques émergent de cet extrait, dont certains apparaissent plus souvent que d'autres ou certains sont travaillés plus en profondeur, mais où tous sont mis à contribution, pensés, étudiés, utilisés, etc., dans les explorations

Chroniques
fondements et epistemologie de l'activite mathematique
foundations and epistemology of mathematical activity

effectuées. Certains concepts et méthodes mathématiques sont traités de façon plus légère ou encore plus isolée, sans avoir besoin de les creuser mais plutôt d'y faire référence, comme la relation de Pythagore, la formule de la distance entre deux points, l'hypoténuse, les angles (aigus, obtus, droits), les triangles (de toutes sortes et isocèles et équilatéraux). Ces concepts et méthodes ne sont pas creusés en profondeur, mais sont mentionnés durant la séance et forment de façon interdépendante les uns avec les autres un tout important au niveau mathématique. D'autres concepts et méthodes prennent une place plus importante, permettant ou représentant une avancée mathématique dans la séance, et sont explorés plus en détails : la somme de la mesure des angles intérieurs d'un triangle donne 180°; la possibilité d'avoir deux mesures différentes pour la même distance ; la relation entre la diagonale d'un rectangle et la bissectrice à ses angles. Et, enfin, certains concepts et méthodes sont au cœur du travail de la séance, pensés et remués constamment avec et par les élèves : la différence entre la (mesure de la) diagonale du carré et (la mesure de) son côté ; la relation et variation du côté du triangle avec l'angle opposé. Il y aurait plus à souligner, et beaucoup plus en subtilités, mais ce qui importe est de réaliser l'ampleur des concepts et méthodes, travaillés, mobilisés et explorés dans l'extrait ci-dessus.

Dans un deuxième temps, des pratiques de mathématisation sont mises en route et offrent un environnement de travail au cœur duquel les concepts et méthodes mathématiques prennent forme. En bref, les concepts et méthodes mathématiques travaillés durant la séance, sont ancrés dans des pratiques de mathématisation qui les font vivre. En voici un rapide aperçu :

- *La communication et l'émergence d'une communauté de validation*. L'exemple de l'investigation autour de l'angle de 45° est illustratif de l'établissement de cette communauté de validation, dans laquelle les élèves proposent des conjectures, argumentent et contre-argumentent sur les idées proposées, justifient leurs affirmations, offrent des preuves à l'appui, réfléchissent pour établir ce qui fonctionne ou non et pourquoi, etc. Les « vérités » mathématiques ne sont pas reçues de l'extérieur, imposées par une autorité externe, mais débattues et travaillées pour en arriver à un consensus communautaire.
- *Le rôle, la pertinence et l'élaboration de langages et symbolismes mathématiques*. Cette dimension est plus complexe à analyser sur un extrait aussi court. Par contre, certaines symbolisations et façons de faire prennent forme durant cet extrait. Ainsi, la façon de dessiner des rectangles et des triangles à travers une « coupe » pour argumenter sur la valeur des angles est représentative d'une symbolisation forte au sein du groupe et qui s'est développée et a été réutilisée en cours de séance. Ainsi, à partir du triangle (), les élèves tendent à le « compléter » pour faire un rectangle (), ce qui leur permet de discuter de ce qui se passe dans le rectangle et le triangle formés. C'est cette représentation symbolisée qui a été utilisée dans les Figures 5 et 6 pour argumenter ou contre-argumenter sur la diagonale et sa division en deux de l'angle de 90°. C'est aussi celle utilisée dans la Figure 7 pour contre-argumenter cette idée. Ainsi, dans un premier temps, un triangle est formé, puis « complété » pour former le rectangle. C'est cette représentation inventée pour symboliser le triangle et le rectangle, mais surtout le lien entre les deux au regard des angles, qui a pris une place et a été réutilisée par les élèves durant la séance.
- *Le rôle accordé aux erreurs et la façon de les traiter*. Les erreurs ont joué un rôle productif durant la séance, permettant de poser des questions et de provoquer des explorations supplémentaires. Ainsi, la stratégie qui proposait de mesurer la distance par les diagonales du carré-unité a déclenché tout le questionnement sur la différence entre la diagonale et le côté du carré et a permis de déboucher sur l'idée de deux mesures différentes de la même distance. De surcroît, la proposition relative à l'angle de 45° a déclenché une investigation faisant

intervenir les angles du triangle, les côtés, les diagonales du rectangle. Aucune de ces propositions, bien qu'erronées, n'a été critiquée. Elles ont été prises au sérieux : elles ont été respectées mathématiquement comme productions potentielles et ont permis de faire comprendre plus en profondeur les concepts et méthodes à l'étude.

- *La résolution et la formulation de problèmes*. Tout au long de la séance, des questions ont été formulées et des problèmes ont émergé, non prévus mais contingents aux explorations réalisées. C'est à travers ces problèmes que la majeure partie, sinon la totalité, des concepts et méthodes mathématiques ont été explorés et approfondis. Les problèmes et questions posées ont été au cœur des explorations mathématiques de la séance.
- *L'appartenance, la responsabilisation et l'*authorship *en mathématiques*. Dans la résolution des problèmes, autant pour la question de départ que celles qui ont émergé en cours de séance, l'engagement des élèves à proposer leurs compréhensions et façons de faire a été fondamentale. Les élèves ont pris leur place dès les premiers instants par des propositions mathématiques importantes (des stratégies, des réponses, des questionnements, des désaccords). En ce sens, ils ont pris la responsabilité des idées produites et se sont aussi engagés à en produire. S'anime alors la double-responsabilité face aux productions mathématiques en salle de classe : les élèves ne sont pas en situation de réception passive des idées, mais contribuent par leurs propres idées à ce qui se produit en classe. Cette double-responsabilisation a joué un rôle dans l'avancement des mathématiques en classe. En particulier, l'engouement des élèves envers l'utilisation spontanée du tableau montre aussi comment ils se sentent interpellés par l'importance de faire avancer la discussion et l'exploration vers un consensus : ils en sont responsables et n'attendront pas que quelqu'un d'autre tranche pour eux. Les élèves parlent entre eux et avec le chercheur-enseignant, se font questionner par ce dernier, lui répondent mais questionnent en retour les autres élèves et répondent aux autres élèves.

À ces cinq dimensions, une autre pratique de mathématisation ressort de l'extrait et est tout aussi fondamentale en mathématiques, soit celle relative à la création de théories (Papert, 1980, 1996). Lors de la discussion sur la différence de mesure entre la diagonale du carré et son côté, une théorie importante a été proposée, soit que le côté le plus grand du triangle fait face à l'angle le plus grand. À ce moment, cette théorie n'avait que le statut d'une affirmation, une sorte de conjecture, mais suite aux questionnements du chercheur-enseignant (« Est-ce que ça fonctionne tout le temps? » / « Qu'arrive-t-il si l'angle est modifié? » / etc.), celle-ci a été davantage confirmée par les justifications des élèves. Cette théorie a par la suite été réutilisée par d'autres, autant élèves que chercheur-enseignant, pour aborder la notion des angles de 45° : si la mesure du côté n'est pas la même, la mesure de l'angle opposé ne le sera pas non plus! Ainsi, tout au long de la séance, cette théorie provient et découle de certaines autres idées liées, des sortes de corollaires qui lui ont donné naissance ou en sont issus, tels que ceux-ci :

> **Corollaire 1** : Dans un triangle, le plus petit angle est toujours opposé au plus petit côté.
> **Corollaire 2** : Dans un triangle, plus un angle est petit, plus le côté qui lui est opposé est petit.
> **Corollaire 3** : Dans un triangle isocèle, les deux angles égaux sont opposés aux côtés égaux.
> **Corollaire 4** : Dans un triangle équilatéral, les angles sont tous les mêmes, associés à des côtés tous de même longueur.
> **Corollaire 5** : Comme les côtés du triangle ne sont pas égaux, les angles ne sont pas égaux non plus.
> **Corollaire 6** : Comme les côtés du triangle sont tous de différente longueur, ils sont opposés à des angles de mesure différente.

Et la liste pourrait continuer. Sans nécessairement être tous formulés dans cette forme explicite, les arguments et explications se rapportant à la théorie initiale mettent en valeur ces idées et

Chroniques
fondements et epistemologie de l'activite mathematique
foundations and epistemology of mathematical activity

extrapolations, qui sont acceptées par les autres élèves et le chercheur-enseignant. C'est de cette façon que cette théorie, et ses corollaires, a commencé à s'établir durant la séance, voire au point d'être prouvée : une certaine preuve par l'utilisation, qui se révèle vraie à travers son utilisation et sa fonctionnalité (Hersh, 2014). Tel que le disent les anglophones: *the proof of the pudding is in the eating*. Voilà une autre pratique de mathématisation mise en route durant la séance.

L'analyse pourrait se raffiner et se continuer. Mais ce portrait, même synthétique, est important : il montre encore une fois comment le travail de résolution de problèmes en classe de mathématiques, ici sous un angle et une analyse didactique, porte fruit au regard des contenus et méthodes et des pratiques de mathématisation. En didactique des mathématiques, il est possible d'affirmer que ce travail « par problème » a été didactique, soit qu'il a fait avancer les mathématiques de la classe. Tout comme pour les méta-analyses et les travaux en *mathematics education*, des constats similaires sont tirés sur les apports significatifs de la résolution de problèmes en enseignement des mathématiques

Plus de temps a été alloué à la dimension didactique (des mathématiques). Cet angle permet de montrer la dimension centrale de la résolution de problèmes en mathématiques, particulièrement pour insister que celle-ci n'est pas une fantaisie ou une mode en didactique des mathématiques. Pour le didacticien des mathématiques, la résolution de problèmes est un *modus operandi*, une condition *sine qua non* de l'enseignement des mathématiques. La résolution de problèmes n'est pas étudiée pour voir si « elle fonctionne » – le fameux *what works* des anglophones – elle est ce par quoi l'enseignement des mathématiques prend forme, et où les mathématiques prennent forme.

Remarques finales

En définitive, un seul constat suffit pour convaincre de l'importance de la résolution de problèmes en enseignement des mathématiques : les études tous azimuts convergent ! Que ce soit pour la réussite à des tests, pour la diversité des impacts chez les élèves, ou encore pour l'avancée des mathématiques en classe, les apports de la résolution de problèmes sont montrés et soulignés par l'ensemble des études recensées. Les *research evidence* fusent de toutes parts, produites par toutes sortes de chercheurs et de toutes sortes de façons. C'est le constat à retenir.

Une conclusion fort simple peut être tirée de tout ceci. En effet, s'il y a un message clair à retenir de tout ce que j'ai présenté, c'est qu'à la question de savoir si la résolution de problèmes apporte aux élèves, la réponse est « oui ». C'est très simple, mais sans toutefois être simpliste…

References

Balmes, R.M., & Coppé, S. (1998). Les activités d'aide à la résolution de problèmes dans les manuels de cycle III. *Grand N*, *63*, 39-57.

Bauersfeld, H. (1994). Réflexions sur la formation des maîtres et sur l'enseignement des mathématiques au primaire. *Revue des Sciences de l'Éducation*, *20*(1), 175-198.

Bednarz, N. (2001). Didactique des mathématiques et formation des enseignants : le cas de l'Université du Québec à Montréal. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, *1*(1), 61-80.

Bednarz, N. (2005). Parler les mathématiques. *Vie Pédagogique*, *136*, 20-23.

Bednarz, N., Dufour-Janvier, B., Poirier, L., & Bacon, L. (1993). Socioconstructivist viewpoint of the use of symbolism in mathematics education. *The Alberta Journal of Educational Research*, 39(1), 41-58.

Chroniques
fondements et epistemologie de l'activite mathematique
foundations and epistemology of mathematical activity

Bkouche, R., Charlot, B., & Rouche, N. (1992). *Faire des mathématiques : Le plaisir du sens*. Paris: Armand Colin.

Boaler, J. (1998). Open and closed mathematics: student experiences and understandings. *Journal for Research in Mathematics Education*, *29*(1), 41–62.

Boaler, J. (1999). Participation, knowledge and beliefs: a community perspective on mathematics learning. *Educational Studies in Mathematics*, *40*, 259-281.

Borasi, R. (1992). *Teaching mathematics through inquiry*. US: Heineman.

Borasi, R. (1996). *Reconceiving mathematics instruction: a focus on errors*. NJ: Ablex.

Brousseau, G (1991). Glossaire de didactique. *Actes de la 6e école d'été de didactique des mathématiques*. http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble, France: La pensée sauvage.

Brown, S. I., & Walter, M. I. (2005). *The art of problem posing* (3e ed.). New York, NY: Routledge.

Burton, L. (2004). *Mathematicians as enquirers: Learning about learning mathematics*. Dordrecht: Kluwer.

Byers, V., & Erlwanger, S. (1984). Content and form in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *15*(3), 259-275.

Cai, J. (2004). What research tells us about teaching mathematics through problem solving. In F. Lester (Ed.), *Teaching mathematics through problem solving: prekindergarten-grade 6* (pp. 241-254). Reston, VA: NCTM.

Charlot, B., Bautier, E., & Rochex, J. (1992). *École et savoir dans les banlieues…et ailleurs*. Paris : Armand Colin.

Chevallard, Y. (1989). Le concept de rapport au savoir : rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel. *Cahier du Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique*, *108*, 211-236.

Cobb, P., Perlwitz, M., & Underwood, D. (1994). Construction individuelle, acculturation mathématique et communauté scolaire. *Revue des sciences de l'éducation*, *20*(1), 41-61.

Davis, P.J., & Hersh, D. (1981). *The mathematical experience*. Boston : Birkhauser.

Devlin, K. (2004). 2003: Mathematicians face uncertainty. *Discover*, *25*(1), 36.

Douady, R. (1984). Mathématiques (Didactique des). *Universalis éducation – Encyclopaedia Universalis*.

English, L., & Gainsburg, J. (2015). Problem solving in a 21st century mathematics curriculum. In L. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 313-35). UK: Routledge.

English, L., & Sriraman, B. (2010). Problem solving for the 21st century. In B. Sriraman & L. English (Eds.), *Theories of mathematics education* (pp. 263-290). Berlin Heidelberg : Springer.

Gouvernement du Québec. (1988). *Fascicule K. Guide pédagogique, primaire, mathématiques. Résolution de problèmes. Orientation générale*. Québec : Ministère de l'Éducation.

Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics, 3*, 413–435.

Goldenberg, P.E., Shteingold, N., & Feurzig, N. (2004). Mathematical habits of mind for young children. In F. Lester (Ed.), *Teaching mathematics through problem solving: prekindergarten-grade 6* (pp. 15-30). Reston, VA: NCTM.

Hadamard, J. (1945). *The psychology of invention in the mathematical field*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Halmos, P. (1980). The heart of mathematics. *The American Mathematical Monthly*, *87*, 519-524.

Hattie, J. et al. (2016). *Visible learning for mathematics teachers*. Corwin.

Hattie, J. (2009). *Visible learning*. Routledge.

Hattie, J. (2012). *Visible learning for teachers*. Routledge.

Hersh, R. (1997). *What is mathematics, really?* New York: Oxford University Press.

Hersh, R. (2014). *Experiencing mathematics: what do we do, when we do mathematics?* US: AMS.

Hiebert, J. (2004). Signposts for teaching mathematics through problem solving. In F. Lester (Ed.), *Teaching mathematics through problem solving: prekindergarten-grade 6* (pp. 53-61). Reston, VA: NCTM.

National Research Council [NRC]. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. J. Kilpatrick, J. Swafford, & B. Findell (Eds.). Washington, DC: National Academy Press.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. In P. Cobb and H. Bauersfeld (Eds), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229-269). Hillsdale, NJ: LEA.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. NY: Cambridge University Press.

Lakoff, G., & Núñez, R. E. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*. New York: Basis Books.

Lampert, M. (1990a). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal*, *27*, 29-63.

Lampert, M. (1990b). Connecting inventions with conventions. In L.P. Steffe & T. Wood (Eds.), *Transforming children's mathematics education* (pp. 253-265). Hillsdale: Erlbaum.

Lang, S. (1985). *The beauty of doing mathematics: Three public dialogues*. New York: Springer-Verlag.

Lester, F. (1994). Musings about mathematics problem-solving research: 1970-1994. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(6), 660-675.

Levasseur, K., & Cuoco, A. (2004). Mathematical habits of mind. In H. Schoen & R.I. Charles (Eds.), *Teaching mathematics through problem solving: grades 6-12* (pp. 27-38). Reston, VA: NCTM.

Lockhart, P. (2009). *A mathematician's lament: How school cheats us out of our most fascinating and imaginative art form*. New York, NY: Bellevue.

Maturana, H.R (1987). Everything is said by an observer. In W.I. Thompson (Ed.) *GAIA: A way of knowing* (pp. 65-82) Hudson, NY: Lindisfarne Press.

Maturana H. R. (1988) Ontology of observing: The biological foundations of self-consciousness and the physical domain of existence. In R.E. Donaldson (Ed.), *Texts in cybernetic theory: an in-depth exploration of the thought of Humberto Maturana, William T. Powers, and Ernst von Glasersfeld*. American Society for Cybernetics (ASC) http://cepa.info/597

Messenger, M.J., & Ames, E. (2004). Teacher story 5: who says they can't do algebra? In H. Schoen & R.I. Charles (Eds.), *Teaching mathematics through problem solving: grades 6-12* (pp. 219-226). Reston, VA: NCTM.

National Council of Teacher of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (1989). *Professional Standards for Teaching Mathematics*. Reston, VA : NCTM.

Nemirovsky, R. (2005). Mathematical spaces. In R. Nemirovsky, A.S. Rosebery, J. Solomon, & B. Warren (Eds.), *Everyday matters in science and mathematics* (pp. 45-94). Mahwah, NJ: LEA.

Chroniques
fondements et epistemologie de l'activite mathematique
foundations and epistemology of mathematical activity

Osana, H.O., & Proulx, J. (2018). A tale of two researchers. *Journal of Numerical Cognition*, *4*(1), 59-83.

Papert, S. (1980) *Mindstorms*. NY: Basic Books.

Papert, S. (1996). An exploration in the space of mathematics education. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *1*, 95-123.

Papert, S. (1972). Teaching children to be mathematicians versus teaching about mathematics. *International Journal of Mathematics Education, Sciences and Technology, 3*, 249-262.

Polya, G. (1957). *How to solve it* (2nd ed.). New York, NY: Doubleday.

Povey, H., & Burton, L., avec Angier, C., & Boylan, M. (1999). Learners as author in the mathematics classroom. In L. Burton (Ed.), *Learning mathematics: From hierarchies to networks* (pp. 232-245). London, UK: Falmer.

Proulx, J. (2013). *De la didactique des mathématiques au Québec : entretiens avec ses bâtisseurs*. Qc : PUQ.

Proulx J. (2016). Mathematical observers observing mathematics. *Constructivist Foundations*, *12*(1), 80-82.

Proulx, J. (2017). Le calcul mental en mathématiques: Quels potentiels pour l'activité mathématique ? *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *17*(4), 288-307.

Proulx, J. (2018). Looking at students' mathematics: from a deficit view on mathematical knowledge toward possibilities of mathematical actions. *Proceedings of Interdisciplinary Scientific Conference on Mathematical Transgressions* (pp. 89-102). Cracovie, Pologne.

Proulx, J. (2019). Recherches qualitatives et validités scientifiques. *Recherches Qualitatives*, *38*(1), 53-70.

Schoenfeld, A. H. (1988). When good teaching leads to bad results: the disasters of 'well taught' mathematics courses. *Educational Psychologist*, *23*(2), 145–166.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), Handbook for research on mathematics teaching and learning (pp. 334-370). New York: Macmillan.

Schoenfeld, A. (1994). Reflections on doing and teaching mathematics. In A. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving* (pp. 53-70). Hillsdale, NJ: LEA.

Schoenfeld, A. (2013). Reflections on problem solving theory and practice. *The Mathematics Enthusiast*, *10*(1-2), 9-34.

Steffe, L.P. (1991). The constructivist teaching experiment: illustrations and implications. In E.v. Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 177-194). Kluwer: The Netherlands

Steffe, L. (2017). Interview episode 1708. *Math ed podcast – Samuel Otten*. https://www.podomatic.com/podcasts/mathed/episodes/2017-08-10T07_37_26-07_00

Stein, M.K., Boaler, J., & Silver, E.A. (2004). Teaching mathematics through problem solving: Research perspectives. In H. Schoen & R.I. Charles (Eds.), *Teaching mathematics through problem solving: grades 6-12* (pp. 245-256). Reston, VA: NCTM.

Taplin, M. (s.d.). Mathematics through problem solving. http://www.mathgoodies.com/articles/problem_solving.html

Theis, L., & Gagnon, N. (2013). *L'apprentissage à travers des situations-problèmes mathématiques : bases théoriques et réalisation pratique*. Qc: PUQ.

Tymoczko, T. (Ed.). (1986). *New directions in the philosophy of mathematics*. Boston: Birkhauser.

Wilder, R. L. (1981). *Mathematics as a cultural system*. UK: Pergamon Press.